PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio

18 novembre 2009

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	B
2	C
3	A
4	C
5	A
6	A
7	D
8	E
9	B
10	C

Problema	Risposta corretta
11	C
12	A
13	A
14	D
15	A
16	B
17	D
18	C
19	D
20	B

Risoluzione dei problemi

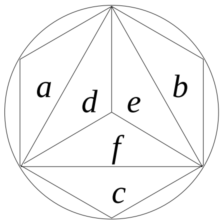
1. La risposta è **(B)**.
Osserviamo che $45 = 3^2 \cdot 5$ divide certamente $N = 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$. Notiamo anche che 42 non è un divisore di N perchè è un multiplo di 7 mentre N non è divisibile per 7; lo stesso vale per $105 = 7 \cdot 15$. Analogamente: 52 è un multiplo di 13, 85 è un multiplo di 17, e sia 13 che 17 non dividono N, perchè sono numeri primi che non figurano nella scomposizione di N in fattori primi.
[Problema proposto da A. Colesanti.]

2. La risposta è **(C)**.
Durante la gita in bicicletta la ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha percorso $2{\cdot}\pi{\cdot}28{\cdot}10000$ cm. La stessa lunghezza deve essere stata percorsa dalla ruota posteriore; quindi se indichiamo con N il numero dei giri fatti dalla ruota posteriore, deve valere l'uguaglianza:
$$2 \cdot \pi \cdot 28 \cdot 10000 = 2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot N$$
da cui si ricava facilmente $N = 17500$.
[Problema proposto da A. Colesanti.]

3. La risposta è **(A)**.
Chiamiamo n il numero di caramelle rimaste nel sacchetto dopo che Ada, Bice e Clelia hanno preso ciascuna sette caramelle e indichiamo con k il numero di caramelle che ciascuna delle prime tre da a Delia. Deve essere: $7 - k = n + 3k$ e quindi $7 = n + 4k$. L'unica possibilità è: $n = 3$ e $k = 1$. Quindi Ada, Bice e Clelia danno una caramella ciascuna a Delia.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

4. La risposta è **(C)**.
Cominciamo con l'osservare che la pulce torna sul 12 dopo s salti se e solo se sn è multiplo di 12. Se n e 12 avessero un divisore comune d, allora in $\frac{12}{d} < 12$ salti la pulce percorrerebbe $n\frac{12}{d} = 12\frac{n}{d}$ ore, quindi tornerebbe sul 12. Poiché questo non può succedere, n e 12 devono essere primi tra loro. D'altra parte, se n e 12 sono primi tra loro, il più piccolo multiplo di n che sia anche multiplo di 12 è $12n$ (minimo comune multiplo tra n e 12), quindi la pulce non torna sul 12 prima di 12 salti. Concludiamo che la pulce può aver scelto n se e solo se n e 12 sono primi fra loro, ossia gli n accettabili sono i seguenti quattro numeri: 1, 5, 7, 11.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

5. La risposta è **(A)**.
Come indicato nella figura, possiamo disegnare il triangolo e l'esagono in modo che abbiano tre vertici in comune.



In questo modo si nota che l'esagono è formato dal triangolo a cui si uniscono tre triangoli isosceli a, b e c, con base i lati del triangolo e un vertice sulla circonferenza. Inoltre, se si uniscono i vertici del triangolo equilatero con il centro della circonferenza lo si scompone in tre triangoli d, e e f congruenti a a, b e c. Dunque l'esagono ha area doppia rispetto al triangolo e il rapporto richiesto è 1/2.
[Problema proposto da R. Morandin.]

6. La risposta è **(A)**.
Diamo ai numeri delle caselle vuote della griglia dei nomi, come nella prima griglia di quelle riportate sotto.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & 6 \\ \hline c & d & e \\ \hline x & 4 & 5 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & 6 \\ \hline c & 3 & e \\ \hline x & 4 & 5 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1+x & b & 6 \\ \hline c & 3 & e \\ \hline x & 4 & 5 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1+x & b & 6 \\ \hline c & 3 & x-2 \\ \hline x & 4 & 5 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1+x & b & 6 \\ \hline 8 & 3 & x-2 \\ \hline x & 4 & 5 \\ \hline\end{array}$$

Sommando i numeri della riga più in basso troviamo $9+x$: questo è il valore che si deve ottenere sommando i numeri di una qualsiasi riga, colonna o diagonale. Considerando la somma dei numeri nella diagonale che va da destra in alto a sinistra in basso, otteniamo subito $d = 3$. Se poi consideriamo la diagonale che va da sinistra in alto a destra in basso, troviamo che a deve essere uguale a $1 + x$. Nella colonna più a destra troviamo $e = x - 2$ e quindi, nella riga centrale, troviamo $c = 8$. A questo punto sommando i numeri della prima colonna troviamo $a + c + x = 1 + x + 8 + x = 9 + 2x$; questa somma deve coincidere con $9 + x$ da cui si ottiene $x = 0$. La griglia completa è allora:

1	2	6
8	3	−2
0	4	5

[Problema proposta di X.Y. Lu.]

7. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo T e L rispettivamente il numero delle tabaccherie e delle latterie presenti lo scorso anno a Nonfumo. Una prima relazione è

$$T = \frac{2}{3}L\,.$$

Quest'anno ci sono $T-2$ tabaccherie e $L+2$ latterie e sappiamo che le prime sono i $9/16$ delle seconde, quindi

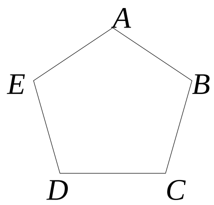
$$T - 2 = \frac{9}{16}(L+2)\,.$$

Sostituendo il valore di T dato dalla prima uguaglianza nella seconda arriviamo a

$$\frac{2}{3}L - 2 = \frac{9}{16}L + \frac{9}{8}\,.$$

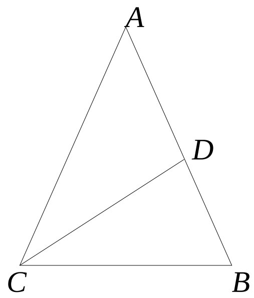
Se da questa equazione ricaviamo L, troviamo $L = 30$.
[Problema proposto da P. Negrini.]

8. La risposta è **(E)**.
Facciamo riferimento alla figura riportata sotto. Osserviamo che sono assi di simmetria del pentagono tutte le rette passanti per un vertice e perpendicolari al lato opposto al vertice. Ad esempio la retta per A e perpendicolare a DC è un asse di simmetria.



Supponiamo che i due colori a disposizione di Ciro siano il rosso e il blu. Se Ciro colora tutti i vertici di rosso, la colorazione che ottiene ha tutti gli assi di simmetria del pentagono. Se colora un vertice, ad esempio A, di rosso e tutti gli altri di blu, la retta per A perpendicolare a DC è un'asse di simmetria della colorazione ottenuta. Supponiamo allora che Ciro colori due vertici di rosso e tre di blu. Se i due vertici rossi sono adiacenti, ad esempio sono A e B, allora la retta passante per D e perpendicolare ad AB è un asse di simmetria. Se i due vertici rossi non sono adiacenti, ad esempio sono E e B, allora i vertici blu individuano un triangolo isoscele, ACD nell'esempio scelto, che ha un asse di simmetria che è anche asse di simmetria della colorazione in questione. Le altre colorazioni possibili sono quelle che si ottengono da quelle che abbiamo descritto, scambiando il rosso con il blu. Dunque nessuna colorazione priva di assi di simmetria è possibile.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

9. La risposta è **(B)**.
Chiamiamo a l'ampiezza in gradi degli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$. Poichè il triangolo CDB è isoscele, anche l'ampiezza di $\widehat{BDC}$ è a. D'altra parte, considerando gli angoli interni del triangolo CDB, abbiamo che l'ampiezza di $\widehat{BDC}$ deve essere anche data da $180° - a - a/2$. Dunque $180° - a - a/a = a$, da cui si ricava $a = 72°$. Infine, l'angolo $\widehat{ADC}$ cercato è il complementare di $\widehat{BDC}$ e quindi la sua ampiezza è $180° - 72° = 108°$.



[Problema proposto da X.Y. Lu.]

10. La risposta è **(C)**.
Se scomponiamo 1600 in fattori primi troviamo

$$1600 = 2^6 \cdot 5^2 \,.$$

Dunque i divisori di 1600 sono i numeri che si scrivono nella forma

$$2^p \cdot 5^q \,,$$

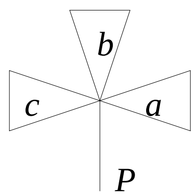
con p numero intero compreso tra 0 e 6, estremi inclusi, e q numero intero compreso tra 0 e 2, estremi inclusi. Tra questi, sono quadrati perfetti quelli per cui: (1) p e q sono entrambi pari; (2) uno dei due è pari e l'altro è zero; (3) sono entrambi uguali a zero. Quindi i quadrati perfetti che dividono 1600 sono:

$$2^0 \cdot 5^0 = 1 \,,\ 2^2 \cdot 5^0 = 4 \,,\ 2^4 \cdot 5^0 = 16 \,,\ 2^6 \cdot 5^0 = 64 \,,$$
$$2^0 \cdot 5^2 = 25 \,,\ 2^2 \cdot 5^2 = 100 \,,\ 2^4 \cdot 5^2 = 400 \,,\ 2^6 \cdot 5^2 = 1600 \,,$$

ovvero 8 in tutto.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

11. La risposta è **(C)**.
Consideriamo un numero di due cifre compreso tra 10 e 99 (estremi inclusi), che non abbia come seconda cifra 0. Chiamiamo D la cifra delle decine e U la cifra delle unità di questo numero. In corrispondenza di questo numero Rita scrive sul foglio il numero $D - U$. Se le due cifre sono uguali, allora $D - U = 0$. Se invece le due cifre sono diverse, il numero che ha le cifre scambiate, ovvero U come cifra delle decine e D come cifra delle unità è compreso tra 10 e 99 ed in corrispondenza di questo numero Rita scrive $U - D$, ovvero l'opposto del numero di prima. I due numeri $D - U$ e $U - D$ scritti da Rita sul foglio e sommati daranno un contributo nullo alla somma finale. Quindi per fare la somma richiesta possiamo considerare solo i multipli di dieci compresi tra 10 e 90. È facile calcolare che la somma dei contributi dati da questi numeri è 45.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

12. La risposta è **(A)**.
Chiamiamo a, b e c i tre triangoli della figura da disegnare:

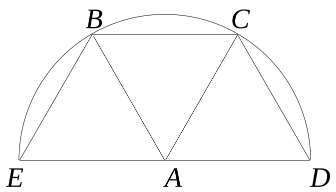


Se si vuole disegnare la figura come richiesto dal problema, una volta iniziato a disegnare uno dei triangoli, lo si deve necessariamente concludere. Si può però scegliere liberamente l'ordine in cui disegnare i tre triangoli e il verso, orario o antiorario, in cui disegnare ciascuno di loro. I possibili modi di ordinare i tre triangoli sono 6:

$$abc\,,\ acb\,,\ bac\,,\ bca\,,\ cab\,,\ cba\,.$$

Fissato uno qualunque di questi ordinamenti, ci sono 2^3 possibilità di realizzarlo perchè, come abbiamo detto, ogni triangolo può essere percorso in due modi diversi. In tutto abbiamo quindi $6 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 3$ possibilità.
[Problema proposto da R. Morandin.]

13. La risposta è **(A)**.
Supponiamo che il rombo ruoti in senso antiorario. Disegniamo la semicirconferenza $\mathcal{C}$ con centro A, passante per B, C e D, come indicato nella figura, e indichiamo con E il punto diametralmente opposto a D su $\mathcal{C}$. Durante la rotazione ciascuno dei vertici B, C e D si muove su $\mathcal{C}$. Inoltre, poichè la rotazione è di 60°, il vertice D va in C, il vertice C va in B e il vertice B va in E.



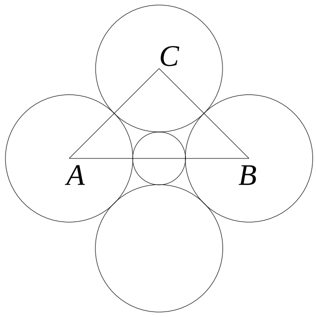
Complessivamente il rombo copre, durante la rotazione, la parte racchiusa dalla semicirconferenza e dal diametro DE, ovvero metà di un cerchio di raggio 1 m, la cui area è $\frac{\pi}{2}$ m^2.
[Problema proposto da A. Sambusetti.]

14. La risposta è **(D)**.
I prezzi delle nove corde, in Sterline Marziane, sono rispettivamente: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. La nona corda sicuramente non è rotta, altrimenti il prezzo delle corde nuove sarebbe almeno di 256 Sterline Marziane. Poichè la somma dei prezzi delle prime sette corde è $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ Sterline Marziane, e la spesa per comprare le corde nuove è strettamente maggiore di 127 Sterline Marziane, l'ottava corda deve essere rotta. La somma dei prezzi delle altre corde rotte è $158 - 128 = 30$ Sterline Marziane. Procedendo come prima, si trova che la sesta corda non può essere rotta mentre la corda da 16 Sterline Marziane, cioè la quinta, deve essere rotta. A questo punto il prezzo delle altre corde rotte è di 14 Sterline Marziane e queste corde possono essere solo alcune delle prime quattro. L'unica possibilità è che siano la seconda, la terza e la quarta, perchè il solo modo di scrivere 14 come somma di 1, 2, 4, 8 (senza ripetizioni) è: $14 = 2 + 4 + 8$. In conclusione le corde rotte sono cinque: la seconda, la terza, la quarta, la quinta e l'ottava.
[Problema proposta da A. Colesanti.]

15. La risposta è **(A)**.
Il numero n deve essere primo, quindi si deve avere $n = 2$ oppure n deve essere dispari. D'altra parte se n è un numero dispari, allora lo è anche n^3 e quindi $n^3 + 3$ è pari e non può essere primo (perchè strettamente maggiore di 2). Dunque l'unica possibilià è $n = 2$; questa scelta

porta ad una soluzione perchè $n^3 + 3 = 8 + 3 = 11$ è primo. In conclusione c'è un solo valore accetabile di n.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

16. La risposta è **(B)**.
Chiamiamo r e R rispettivamente i raggi della moneta d'oro e delle monete d'argento. Facendo riferimento alla figura riportata sotto, in cui sono disegnate le cinque monete, osserviamo che il triangolo ABC è rettangolo (nel vertice C) e isoscele. Inoltre l'ipotenusa AB ha lunghezza $2(R + r)$ mentre i cateti AC e BC hanno lunghezza $2R$.



Quindi $2(R + r) = 2\sqrt{2}\,R$ da cui $R + r = \sqrt{2}R$. Dividendo entrambi i termini per R si ottiene

$$1 + \frac{r}{R} = \sqrt{2}\,.$$

da cui segue $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

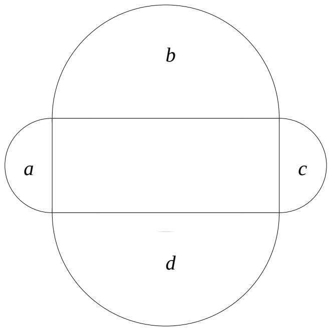
17. La risposta è **(D)**.
Poichè $a \geq 0$, abbiamo $a^3 + a \geq 0$ e quindi dalla disuguaglianza del problema segue che $b - b^3 > 0$. D'altra parte $b - b^3 = b(1 - b^2)$ e affinchè questa quantità sia strettamente positiva (tenendo conto che $b \geq 0$) deve valere sia $b > 0$ che $b < 1$. Osserviamo inoltre che, essendo $a \geq 0$, deve valere $a + a^3 \geq a$ e, essendo $b > 0$ (come provato sopra) deve valere $b - b^3 < b$. Quindi dalla disuguaglianza $a + a^3 \leq b - b^3$ segue che $a < b$. Abbiamo così provato $a < b < 1$.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

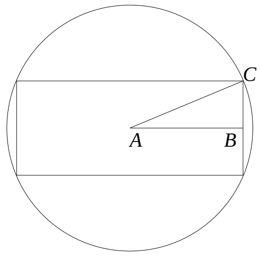
18. La risposta è **(C)**.
Le disposizioni possibili di maiuscole e minuscole nella password sono 6:

$$MMmm\,,\ mmMM\,,\ MmMm\,,\ mMmM\,,\ mMMm\,,\ MmmM\,,$$

dove M indica una lettera maiuscola e m indica una lettera minuscola. Per ciascuna di queste disposizioni, ciascuna delle 4 lettere può assumere 5 valori distinti, quindi ogni disposizione da luogo a 5^4 possibilità. Di conseguenza ci sono $6 \cdot 5^4$ possibili password che rispondono alle caratteristiche richieste. Questo è il numero massimo di password che Carla deve provare prima di accendere il computer.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

19. La risposta è **(D)**.
Possiamo ottenere l'area richiesta per differenza, considerando l'area della figura che si ottiene unendo al rettangolo i quattro semicerchi costruiti sui lati e sottraendo all'area di questa figura l'area del cerchio in cui il rettangolo è inscritto.





L'area del rettangolo è $60\,\mathrm{cm}^2$. Facendo riferimento alla figura sopra a sinistra, l'area di ciascuno dei due semicerchi a e c è $\frac{25}{8}\pi\,\mathrm{cm}^2$ mentre l'area di ciascuno dei due semicerchi b e d è $18\pi\,\mathrm{cm}^2$. Quindi l'area complessiva della prima figura è: $(60+\frac{25}{4}\pi+36\pi)\mathrm{cm}^2$. Il raggio R del cerchio in cui il rettangolo è inscritto può essere trovato con il Teorema di Pitagora applicato al rettangolo ABC nella figura di destra. Si trova così

$$R=\left(\sqrt{\frac{25}{4}+36}\right)\,\mathrm{cm}\,.$$

Quindi l'area del cerchio in cui è inscritto il rettangolo è

$$\left(\frac{25}{4}\pi+36\pi\right)\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Facendo la differenza delle aree delle due figure si trova che l'area richiesta dal problema è $60\,\mathrm{cm}^2$.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

20. La risposta è **(B)**.
Le affermazioni di Anna e Bea sono in contraddizione tra loro. Infatti se Anna ha un poker deve avere almeno una carta di cuori e quindi Bea non può avere tutte le cinque carte di cuori. Quindi una tra Anna e Bea mente. Se fosse Anna a mentire, le affermazioni di Bea, Caio e Dino dovrebbero essere tutte vere. D'altra parte Dino afferma di avere tre carte dello stesso valore, quindi in particolare ha una carta rossa, ma Bea ha tutte le carte di cuori e di conseguenza Caio, che ha cinque carte rosse, deve avere tutte le carte di quadri. Quindi l'affermazione di Dino è in contrasto con quelle di Bea e Caio. Deduciamo che Bea, Caio e Dino non stanno dicendo tutti la verità, quindi Anna afferma il vero e Bea mente. Concludiamo osservando che le affermazioni di Anna, Caio e Dino sono tra loro compatibili. Ad esempio: Anna potrebbe avere un poker di assi e il re di picche; Caio potrebbe avere il re di cuori, il re di quadri, la regina di cuori, la regina di quadri e il fante di cuori; Dino potrebbe avere il fante di quadri, il fante di picche e il fante di fiori, il dieci di cuori e il dieci di quadri e Bea le cinque carte rimanenti.
[Problema proposto da D. Lombardo.]