PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

18 novembre 2009

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore**. *Buon lavoro e buon divertimento.*

Nome __________________ *Cognome* ____________________ *Classe* _____

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*

1) Quale dei seguenti numeri è un divisore di $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
(A) 42, **(B)** 45, **(C)** 52, **(D)** 85, **(E)** 105.

2) La ruota anteriore della bicicletta di Chiara ha il raggio di 28 cm, mentre la ruota posteriore ha il raggio di 16 cm. Al termine di una gita in bicicletta la ruota anteriore ha fatto 10000 giri; quanti ne ha fatti la ruota posteriore nella stessa gita?
(A) 12000, **(B)** 14500, **(C)** 17500, **(D)** 19000, **(E)** 21000.

3) La nonna ha un sacchetto di caramelle che vuol dare alle sue nipoti: Ada, Bice, Clelia e Delia. Ada prende sette caramelle e lo stesso fanno Bice e Clelia; a questo punto nel sacchetto restano alcune caramelle, che vengono prese da Delia, ma sono meno di sette. Allora Ada, Bice e Clelia danno alcune delle loro caramelle a Delia (ciascuna lo stesso numero) in modo che tutte e quattro abbiano lo stesso numero di caramelle. Quante caramelle riceve Delia da ciascuna delle altre tre?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

4) Una pulce si trova sul numero 12 del quadrante di un orologio. Sceglie un numero naturale n compreso tra 1 e 12, estremi inclusi, e comincia a fare salti di n numeri sul quadrante, in senso orario (se ad esempio $n = 3$, dopo il primo salto è sul 3, dopo il secondo è sul 6 e così via). Dopo 12 salti, per la prima volta si ritrova sul numero 12 del quadrante. In quanti modi distinti può aver scelto n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 4, **(D)** 6, **(E)** 12.

5) Disegno un triangolo equilatero e un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. Qual è il rapporto tra l'area del triangolo e quella dell'esagono?
(A) $\frac{1}{2}$, **(B)** $\frac{1}{3}$, **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{6}$.

6) Nella griglia a fianco x è un numero da determinare. Si sa che è possibile scrivere un numero in ogni cella vuota della griglia in modo che la somma dei tre numeri che si trovano su qualunque riga, colonna o diagonale, sia sempre la stessa. Allora x vale:
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 3, **(D)** 6, **(E)** 9.

		6
x	4	5

7) Nella città di Nonfumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i 2/3 delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicchè ora le tabaccherie sono solo i 9/16 delle latterie (dall'anno scorso a quest'anno il numero complessivo dei negozi di Nonfumo è rimasto lo stesso). Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo?
(A) 12, **(B)** 16, **(C)** 20, **(D)** 30, **(E)** 60.

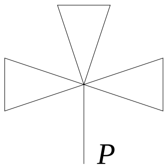
8) Ciro ha davanti a sé un foglio con disegnato un pentagono regolare $ABCDE$, e due pennarelli di colori diversi. Vuole colorare tutti i vertici del pentagono usando solo i due pennarelli che ha, in modo che la colorazione finale non abbia nessun asse di simmetria. In quanti modi distinti può farlo?
(A) Uno, **(B)** due, **(C)** quattro, **(D)** cinque, **(E)** nessuno.

9) ABC è un triangolo isoscele con $AB = AC$. D è un punto del lato AB tale che CD sia la bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB}$. Sapendo che $CB = CD$, quanto misura l'angolo $\widehat{ADC}$?
(A) 90°, **(B)** 108°, **(C)** 120°, **(D)** 144°, **(E)** 155°.

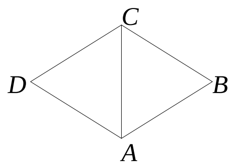
10) Quanti quadrati perfetti dividono 1600? [Un quadrato perfetto è un numero del tipo n^2, con n numero naturale. 1, 4, 9, 16, sono esempi di quadrati perfetti.]
(A) 2, **(B)** 4, **(C)** 8, **(D)** 10, **(E)** 12.

11) La piccola Rita fa questo gioco: per ogni numero intero compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, sottrae la cifra delle unità da quella delle decine e scrive il risultato su un foglio (ad esempio per 21 scrive 1, cioè $2 - 1$, mentre per 37 scrive -4, cioè $3 - 7$). Alla fine somma tutti i numeri che ha scritto sul foglio; quale risultato trova?
(A) 0, **(B)** -30, **(C)** 45, **(D)** -50, **(E)** 100.

12) In quanti modi distinti posso disegnare la figura a fianco partendo da P, senza mai staccare la penna dal foglio e senza passare più di una volta da nessun punto eccettuato il vertice comune ai tre triangoli?
(A) $2^4\,3$, **(B)** $2^3\,3$, **(C)** 2^4, **(D)** $2^2\,3^3$, **(E)** 3^3.



13) Nel rombo in figura, i triangoli ABC e ACD sono equilateri ed hanno lato di lunghezza 1 m. Se ruotiamo il rombo di 60° rispetto al vertice A, qual è l'area della superficie coperta dal rombo nella rotazione?
(A) $\frac{\pi}{2}$ m^2, **(B)** 1 m^2, **(C)** π m^2, **(D)** $\frac{\pi}{3}$ m^2, **(E)** 2 m^2.



14) Ziggy ha rotto alcune delle nove corde della sua chitarra marziana. Le corde sono numerate da 1 a 9; la prima costa una Sterlina Marziana e ciascuna delle altre costa il doppio di quella che ha il numero precedente. Dopo un rapido conto, Ziggy calcola che dovrà spendere 158 Sterline Marziane per comprare le corde nuove. Quante sono le corde rotte?
(A) Una, **(B)** tre, **(C)** quattro, **(D)** cinque, **(E)** sette.

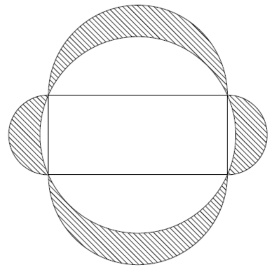
15) La professoressa di Italiano entra in una classe di 24 studenti, tutti presenti, per un'ora di interrogazione. Decide di interrogare gli studenti a cui corrisponde sul registro un numero n che sia primo e tale che anche $n^3 + 3$ sia primo. Quanti studenti interroga?
(A) Uno, **(B)** tre, **(C)** quattro, **(D)** sette, **(E)** nove.

16) Una moneta d'oro è circondata da quattro monete d'argento uguali tra loro. Ogni moneta d'argento è tangente alla moneta d'oro e a due monete d'argento. Trovare il rapporto tra il raggio della moneta d'oro e quello delle monete d'argento.
(A) $\frac{1}{4}$, **(B)** $\sqrt{2}-1$, **(C)** $\frac{1}{2}$, **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(E)** 1.

17) a e b sono due numeri maggiori o uguali a zero. Sappiamo che: $a^3 + a < b - b^3$. Qual è l'ordine corretto tra i tre numeri a, b e 1?
(A) $b < a < 1$, **(B)** $a = b = 1$, **(C)** $a < 1 < b$, **(D)** $a < b < 1$, **(E)** $1 < a < b$.

18) Carla si è dimenticata la password di accensione del suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante password diverse deve provare Carla, al massimo, per accendere il computer?
(A) $3 \cdot 5^4$, **(B)** 5^5, **(C)** $6 \cdot 5^4$, **(D)** 5^6, **(E)** $3 \cdot 5^6$.

19) Disegniamo un rettangolo di lati 5 cm e 12 cm, la circonferenza in cui è inscritto e le semicirconferenze che hanno per diametro i lati del rettangolo e sono esterne ad esso, come indicato nella figura a fianco. Qual è l'area della parte ombreggiata?
(A) 45 cm^2, **(B)** 13π cm^2, **(C)** 19π cm^2, **(D)** 60 cm^2, **(E)** 20π cm^2.



20) Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa. Anna dice: "Io ho un poker!" (quattro carte dello stesso valore). Bea dice: "Io ho tutte e cinque le carte di cuori". Caio dice: "Io ho cinque carte rosse". Infine Dino dice: "Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno tra loro lo stesso valore". Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?
(A) Anna, **(B)** Bea, **(C)** Caio, **(D)** Dino, **(E)** non è possibile determinarlo.