I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

4 dicembre 1996

D	D	A	B	B	E	D	E	C	B	A	C	D	B	D	D	A	D	A	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(D)**.
In un'ora ci sono 3600 secondi, quindi in 3 ore il ciclista percorre $5 \cdot 3 \cdot 3600$ m, cioè 54 km.

2) La risposta è **(D)**.
Infatti si ha $\dfrac{1}{320} = 0,003125 = 0,3125\%$.

3) La risposta è **(A)**.
L'angolo $D\widehat{B}C$, per il teorema dell'angolo esterno, vale

$$B\widehat{A}E + A\widehat{E}B = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ.$$

Ne segue che

$$B\widehat{D}C = 180^\circ - D\widehat{B}C - B\widehat{C}D = 180^\circ - 80^\circ - 25^\circ = 75^\circ.$$

4) La risposta è **(B)**.
Sia x il peso del secchio vuoto e y il peso della sabbia. Si ha

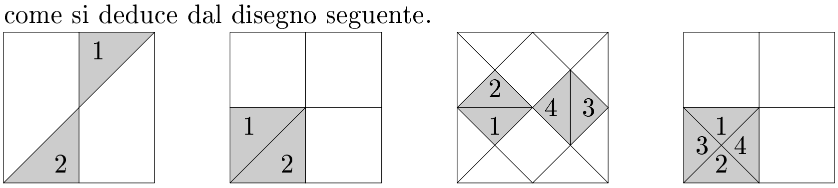
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + \dfrac{y}{2} = 5 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad x{=}1 \text{ kg} \;\text{ e }\; y{=}8 \text{ kg}.$$

5) La risposta è **(B)**.
Il tempo di cottura per 2,5 kg di pesce è $12 \cdot \dfrac{2,5}{0,5} = 12 \cdot 5 = 60$ minuti. Il tempo totale necessario sarà 60+15 minuti, e quindi il forno deve essere acceso alle ore 18:45.

6) La risposta è **(E)**.
Supponendo che il lato dei quadrati misuri 2, si ottiene subito che:

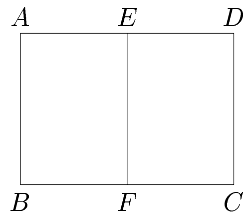
- l'area della prima figura è $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$,
- l'area della seconda figura è 1,
- l'area della terza figura è $2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

Seconda soluzione
La risposta è **(E)** come si deduce dal disegno seguente.



7) La risposta è **(D)**.
Infatti **(A)** e **(B)** sono in contraddizione con quello che è successo l'altro ieri; **(C)** e **(E)** sono in contraddizione con quanto è successo ieri. Invece la risposta **(D)** è compatibile con quanto si è verificato sia ieri che l'altro ieri.

8) La risposta è **(E)**.
Dalla similitudine fra $ABCD$ e $ABFE$ si ricava $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{\dfrac{AD}{2}} = 2\dfrac{AB}{AD}$, da cui



$\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = 2$ e quindi $\dfrac{AD}{AB} = \sqrt{2}$.

9) La risposta è **(C)**.
La velocità che l'atleta mantiene negli ultimi 80 m finali è data da $v = \dfrac{80}{10-2,4}$ m/s $= \dfrac{80}{7,6}$ m/s.
Pertanto per percorrere altri 100 metri alla stessa velocità, l'atleta impiega $100 \cdot \dfrac{7,6}{80}$ s $= \dfrac{76}{8}$ s $= 9,5$ s. Il tempo complessivo per percorrere 200 m sarà allora 19,5 s.

10) La risposta è **(B)**.
Indicata con x la lunghezza del lato dell'ottagono, si deve avere $x + 2\dfrac{x}{\sqrt{2}}$=10 cm, da cui $x = \dfrac{10}{1+\sqrt{2}} = 10\left(\sqrt{2}-1\right)$cm.

11) La risposta è **(A)**.
La componente non acquosa delle angurie costituisce all'inizio l'1% del peso totale, e dunque è di 5 kg. Alla fine dello stoccaggio questi 5 kg rappresentano il 2% del peso totale, che quindi è di $\dfrac{5 \cdot 100}{2}$=250 kg.

12) La risposta è **(C)**.
Indichiamo con d la diagonale minore del rombo e con $D = 2d$ la diagonale maggiore. L'area S del rombo è data da

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2,$$

quindi $d = \sqrt{S} = \sqrt{80}$ cm e $D = 2\sqrt{80}$ cm.
Il teorema di Pitagora permette di calcolare la lunghezza del lato l:

$$l = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{4} + \frac{320}{4}} = \sqrt{20+80} = 10 \text{ cm}.$$

13) La risposta è **(D)**.
Le affermazioni di Carlo e Marco non hanno alcun elemento in comune, pertanto se uno di loro avesse ragione, l'altro avrebbe "completamente" torto. Lo stesso dicasi delle affermazioni di Franco e Tullio. Dunque ha ragione Roberto, le cui affermazioni hanno almeno un elemento in comune con quelle degli amici.
D'altra parte, supponendo vera l'affermazione di Roberto, si verifica facilmente che ognuno degli altri ha detto qualcosa di vero.

14) La risposta è **(B)**.
Si ha $m \cdot n = (m+1) \cdot n - n$. Poiché il numero $(m+1) \cdot n = 10^{77} \cdot n$ si ottiene aggiungendo 77 zeri ad n, esso ha $99 + 77 = 176$ cifre, la prima delle quali è 7. Sottraendo n, che ha un numero minore di cifre, la prima cifra può al massimo diminuire di uno, e quindi il numero di cifre non cambia.

Seconda soluzione
Infatti, poichè $m < 10^{77}$ e $n < 10^{99}$, si ha $m \cdot n < 10^{77+99} = 10^{176}$ e e quindi $m \cdot n$ ha non più di 176 cifre. D'altra parte, $m > 9 \cdot 10^{76}$, $n > 7 \cdot 10^{98}$, da cui $m \cdot n > 63 \cdot 10^{175}$, cioè $m \cdot n$ ha almeno 176 cifre.

15) La risposta è **(D)**.
La probabilità che una singola squadra vinca tutte le sue partite (che sono tre) è evidentemente $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.
Poichè le squadre sono quattro, la probabilità che una di esse vinca tutte le sue partite (essendo impossibile che due squadre vincano tutte le partite) è $4 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Seconda soluzione
Dopo la prima giornata di gara due squadre hanno vinto le rispettive partite, nel successivo incontro tra queste due squadre, una di esse risulta vincitrice. Questa è l'unica squadra che può vincere tutte le sue partite, e questo accade solo se vince il suo terzo incontro, e quindi con probabilità pari a $\dfrac{1}{2}$.

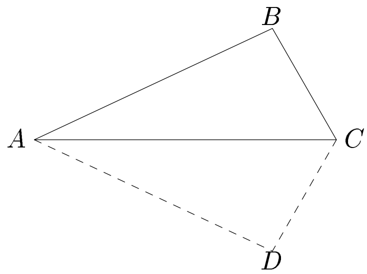
16) La soluzione è **(D)**.
Consideriamo i triangoli ADE e BEF. Essi sono uguali poiché $DE = EF$, $D\widehat{A}E = E\widehat{B}F$, $B\widehat{E}F = 180° - 90° - 60° = 30° = A\widehat{D}E$.
Ne segue $AB = AE + EB = AE + AD = AE + 2 \cdot AE = 3 \cdot AE$ e di conseguenza

$$AB = 3 \cdot AE = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \sqrt{3} \cdot DE$$

e dunque il rapporto fra le aree dei due triangoli è 3.

17) La risposta è **(A)**.
Infatti, contando il numero delle cuciture adiacenti agli esagoni ($6 \cdot 20 = 120$), più il numero delle cuciture adiacenti ai pentagoni ($5 \cdot 12 = 60$) e osservando che ogni cucitura viene contata due volte (perchè adiacente a due poligoni) si ottiene $\dfrac{120 + 60}{2} = 90$.

18) La risposta è **(D)**.
Infatti la somma degli angoli vale 360°, quindi almeno uno di essi deve essere minore o uguale a 90°. D'altra parte se si prende un triangolo ABC con gli angoli in A, B, C rispettivamente uguali a 25°, 95°, 60° (ad esempio) e lo si ribalta rispetto al lato AC si ottiene un quadrilatero $ABCD$ che ha tre angoli ottusi.
Per verificare che anche la risposta **(A)** è sbagliata si pensi al caso del rettangolo.



19) La risposta è **(A)**.
Indichiamo con p_1, p_2, p_3, p_4 la probabilità di estrarre una pallina bianca rispettivamente dal primo, dal secondo, dal terzo, dal quarto sacchetto. Si ha

$$p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \qquad p_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \qquad p_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{15} \qquad p_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{15}.$$

Poichè si sa che è stata estratta una pallina bianca, la probabilità che essa sia stata estratta dall'i-esimo sacchetto è pari a $\dfrac{p_i}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$. Il sacchetto da cui è più probabile che sia stata estratta la pallina è dunque il primo; tale sacchetto non è altro che quello in cui maggiore è il rapporto tra il numero delle palline bianche e quello delle palline nere.

20) La risposta è **(D)**.
Infatti gli angoli interni di un poligono regolare di n lati valgono $\dfrac{n-2}{n}180°$, nel caso del pentagono si ha dunque $E\widehat{A}B = \dfrac{3}{5}180° = 108°$. Pertanto $E\widehat{A}C = 108° - 60° = 48°$. Siccome il triangolo EAC è isoscele, l'angolo $E\widehat{C}A$ vale $\dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$. Parimenti, per simmetria, si avrà $B\widehat{C}D = 66°$ e, concludendo,

$$E\widehat{C}D = 360° - E\widehat{C}A - A\widehat{C}B - B\widehat{C}D = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°.$$