I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

5 dicembre 2001

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	C	B	A	A	C	E	C	E	E	E	E	D	D	B	D	E	E	B	D

1) La risposta è **(E)**. In forma decimale, si ha infatti $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$, $c = 2$, quindi $a < b < c$, cioè $c > b > a$.

2) La risposta è **(C)**. Se si prendono solo 3 calzini, ciascuno di essi può essere di un colore differente dagli altri due. Se si prendono 4 calzini, due di essi sono necessariamente dello stesso colore dato che i colori possibili sono solo 3.

3) La risposta è **(B)**. Per costruire ciascuno degli oggetti raffigurati sono necessarie 2 aste lunghe, 4 aste corte e 6 viti. Con 60 aste lunghe si potrebbero costruire 30 oggetti, con 60 aste corte 15 oggetti, con 60 viti 10 oggetti. Quest'ultimo numero, il minimo fra i tre calcolati, è quindi quello richiesto.

4) La risposta è **(A)**. Infatti $70 - 23 = 47$ persone parlano solo inglese, $45 - 23 = 22$ persone parlano solo spagnolo. Le persome che parlano almeno una delle due lingue sono quindi $47 + 22 + 23 = 92$, restano 8 persone che non ne parlano nessuna delle due.

5) La risposta è **(A)**. Abbiamo $b = a = 2001$, da cui $c = \dfrac{b}{3} = \dfrac{2001}{3} = 667$. Quindi $x = c - 380 = 667 - 380 = 287$.

6) La risposta è **(C)**. La ragazza avrebbe dovuto ricevere 6,10 Euro. Poiché ella ha ricevuto 13,90 Euro, deve restituire $13{,}90 - 6{,}10$ Euro$=$ 7,80 Euro.

7) La risposta è **(E)**. Infatti, perché le rette si trasformino come nelle figure occorre considerare angoli di rotazione multipli dell'angolo retto e l'esame dei vari casi esclude le prime quattro figure, mentre l'ultima si ottiene con una rotazione di un angolo piatto.

8) La risposta è **(C)**. Il numero di cubi necessari può essere determinato immaginando di costruire la scatola attaccando 4 pannelli laterali quadrati formati da $9 \times 9 = 81$ cubetti su una base anch'essa quadrata composta da 10×10 cubetti. In totale avremo $4 \cdot 81 + 100 = 424$ cubetti.

9) La risposta è **(E)**. L'equazione data può essere scritta come

$$x + 1 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{3} + 1 + \cdots + \frac{x}{2001} + 1 = 2001$$

dove il membro di sinistra è costituito da 2001 cifre 1 e altrettante frazioni tutte aventi x al numeratore sommate insieme. Semplificando si ha quindi

$$x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2001}\right) = 0$$

che ha come soluzione $x = 0$.

10) La risposta è **(E)**. La moglie non può essere un cavaliere, altrimenti non potrebbe affermare falsamente di essere un furfante. La moglie è quindi un furfante e la sua risposta è falsa; quindi il marito è un cavaliere, che dice il vero. I due sono quindi entrambi laureati e tutte le caselle possono essere riempite.

11) La risposta è **(E)**. Per ognuna delle 6 circonferenze è possibile scegliere uno dei 2 archi individuati dai due punti di tangenza (o dal punto A o B e dall'unico punto di tangenza per la prima e l'ultima circonferenza). Il numero totale di cammini sarà quindi $2^6 = 64$.

12) La risposta è **(E)**. Si ha infatti $xy = z$. Quindi z non può essere un numero primo (altrimenti si avrebbe $x = z$ oppure $y = z$), e neppure il quadrato di un numero primo (altrimenti l'unica altra possibilità sarebbe $x = y$) Questo permette di scartare le prime risposte. È invece possibile $z = 16$ (ad esempio con $x = 2$ e $y = 8$).

13) La risposta è **(D)**. Cancellando infatti uno qualsiasi dei 4 segmenti esterni, il bordo esterno della figura rimanente è un pentagono (non convesso). I lati esterni sono quattro, e dunque quattro sono i pentagoni che si possono vedere nella figura.

14) La risposta è **(D)**. Infatti i numeri in questione sono necessariamente le soluzioni dell'equazione $x^2 + 4x - 21 = 0$, cioè 3 e -7.

15) La risposta è **(B)**. Il primo lancio da solo ovviamente non consente mai di raggiungere 13. Qualunque sia l'esito del primo lancio, c'è sempre uno ed un solo evento dei 12 possibili nel secondo lancio che fa sì che la somma sia 13. La probabilità richiesta à quindi $\frac{1}{12}$.

16) La risposta è **(D)**. Utilizzando n cifre in base b è possibile esprimere numeri m tali che, in base 10, $0 \leq m \leq b^n - 1$. Dalle relazioni $2^{10} = 1024 < 2001 < 2048 = 2^{11}$ si ha quindi n=11.

Seconda Soluzione

Supponiamo che la scrittura in base 2 di 2001 abbia n cifre. Allora 2001 è strettamente minore del numero che in base 2 si rappresenta con un 1 seguito da n zeri e maggiore o uguale al numero che in base 2 si rappresenta con un 1 seguito da $n-1$ zeri. Chiaramente il primo numero sarà dato da 2^n e il secondo da 2^{n-1}. Visto che $2^{11} = 2048 > 2001 > 1024 = 2^{10}$ concludiamo che $n = 11$.

17) La risposta è **(E)**. Detto l il lato del quadrato, il rettangolo ottenuto dopo la piegatura avrà lati di lunghezza l e $\frac{l}{2}$, e il suo perimetro sarà quindi $3l$. Poiché è noto che il perimetro è 18 cm, si ha $l = 6$ cm, e l'area è 36 cm^2.

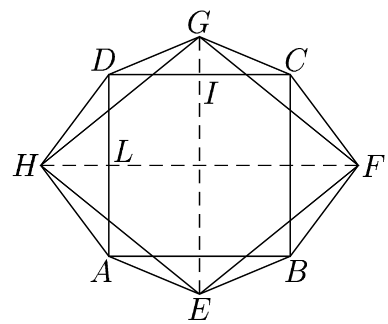
18) La risposta è **(E)**. Denotiamo con G' e G'' i genitori e con F' e F'' i figli e mostriamo che 9 traversate bastano. La strategia è: (1) vanno F' e F''; (2) torna F'; (3) va G'; (4) torna F''; (5) vanno F' e F''; (6) torna F'; (7) va G''; (8) torna F''; (9) vanno F' e F''. Per vedere che non è possibile effettuare un numero minore di traversate basta osservare che (a parte l'eventuale scambio fra i genitori oppure fra i figli quando è possibile) la strategia è obbligata. Infatti, a ogni passo, una mossa diversa porterebbe necessariamente (dato che la barca non può andare da sola) a viaggi di andata e ritorno delle stesse persone e aumenterebbe il numero complessivo di traversate.

Seconda Soluzione

Chiamiamo A gli adulti e F i figli. Schematizziamo cosí il problema: se, ad esempio, un adulto e due figli si trovano sulla riva iniziale, un adulto e la barca sulla riva finale allora indichiamo la situazione come (AFF, AB). Per capire qual è la successione ottimale di viaggi ci baseremo sul seguente semplice principio: se durante una serie di attraversamenti una stessa situazione occorre due volte, la serie non è ottimale.

All'inizio ci troviamo nella situazione $(AAFFB,\cdot)$ ed è chiaro che il primo viaggio dovrà essere intrapreso da tutti e due figli, altrimenti chiunque vada sull'altra sponda dovrà tornare indietro con la barca, riportandoci al punto di partenza $(AAFFB,\cdot)$. Quindi dopo il primo viaggio saremo in (AA, FFB) e uno solo dei figli dovrà portare la barca indietro (secondo viaggio) mettendoci nella situazione $(AAFB, F)$. Il terzo viaggio lo farà un adulto (altrimenti torneremmo a (AA, FFB)) e il quarto lo farà il figlio rimasto sulla sponda di arrivo, portandoci nella situazione $(AFFB, A)$. Il quinto viaggio non potrà essere intrapreso dall'adulto o da uno solo dei figli, altrimenti per riportare indietro la barca si tornerà o alla situazione $(AFFB, A)$ o a $(AAFB, F)$. Pertanto dopo il quinto viaggio ci troveremo in $(A, AFFB)$ e continuando a ragionare nello stesso modo si vede facilmente che il trasferimento ottimale passerà per forza per le situazioni (AFB, AF), $(F, AAFB)$, (FFB, AA), $(\cdot, AAFFB)$, per un totale di altri quattro attraversamenti. Quindi in tutto la famiglia avrà bisogno di almeno 9 viaggi per trasferirsi.

19) La risposta è **(B)**. Siano I e L i punti medi dei lati DC e AD rispettivamente. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DIG si ha $GI = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, applicando lo stesso teorema al triangolo rettangolo DHL si ha $HL = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Le diagonali del quadrilatero $EFGH$ sono perpendicolari, e si ha $EG = 5 + 24 + 5 = 34$, $HF = 9 + 24 + 9 = 42$. L'area richiesta sarà quindi $34 \cdot \dfrac{42}{2} = 714$.



20) La risposta è **(D)**. Tra i numeri di questo tipo (che sono $8! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8 = 40320$) ce ne sono $7!$ con ultima cifra 1, $7!$ con ultima cifra 2, ... e $7!$ con ultima cifra 9. La cifra delle unità del loro prodotto sarà dunque la stessa del numero $(1\times2\times3\times4\times6\times7\times8\times9)^{7!}$. Siccome il numero in parentesi ha come ultima cifra 6, ogni sua potenza avrà ancora 6 come cifra delle unità.

Seconda Soluzione Per ogni cifra finale c'è lo stesso numero di numeri. Se ora si accoppia un numero che finisce per 1 con uno che finisce per 6, uno che finisce con 2 con uno che finisce per 3, uno che finisce per 4 con uno che finisce per 9 e uno che finisce per 7 con uno che finisce per 8 si ottengono quattro numeri che finiscono per 6. Quindi il prodotto finale è prodotto di tanti (cioè $4 \cdot 7!$) numeri che finiscono per 6, e finisce dunque per 6.