



I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio

22 novembre 2011

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	A
2	B
3	C
4	B
5	E
6	D
7	A
8	C
9	D
10	A
11	B
12	E
13	C

Problema	Risposta corretta
14	B
15	C
16	D
17	A
18	C
19	C
20	E
21	B
22	C
23	C
24	A
25	E

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(A)**.

Un numero multiplo di 1, 2, 3, 4, 5, 6 deve essere necessariamente multiplo di 10, e quindi deve avere 0 come cifra delle unità.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

2. La risposta è **(B)**.

Ciascuno dei tre rettangoli ha area doppia rispetto al triangolo ABC , quindi i tre rettangoli hanno la stessa area.

[Problema proposto da K. Kuzmin.]

3. La risposta è **(C)**.

Osserviamo che, fissati due dei tre numeri su una faccia triangolare, il terzo è determinato dalla richiesta che la somma sia divisibile per tre (se la somma dei due numeri già fissati lascia resto r nella divisione per 3, allora il terzo numero deve lasciare resto $3 - r$). Chiamiamo allora x il numero sulla punta della piramide e a, b due numeri scritti su due vertici consecutivi della base. Una faccia laterale adiacente a quella etichettata a, b, x ha due vertici su cui sono scritti b e x , e quindi sul suo terzo vertice c'è scritto a . Similmente, sul successivo vertice di base c'è scritto b , sul successivo a , e così via. Degli otto vertici della base, su quattro è scritto a e sugli altri quattro è scritto b . Quindi la somma dei numeri sulla base è $4(a + b)$. Affinché quest'ultimo

numero sia divisibile per 3, dev'essere o $a = 1, b = 2$ (o simmetricamente $a = 2, b = 1$), oppure $a = b = 3$. L'ultimo caso è escluso (infatti si avrebbe anche $x = 3$ contro l'ipotesi che non tutti i numeri siano uguali a 3), e quindi si ha che $x = 3$ e la somma dei numeri sulla base è $4(a + b) = 12$. La risposta è quindi 15.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

4. La risposta è **(B)**.

Dalla prima uguaglianza ricaviamo $m = 7 + n$, quindi $m + 5n = 7 + 6n$, e n è un numero intero positivo. In particolare $7 + 6n$ è maggiore di zero per ogni n . La limitazione $7 + 6n \leq 2011$ diventa $6n \leq 2004$ cioè $n \leq 334$. Quindi n può assumere 334 valori distinti, e di conseguenza lo stesso vale per $m + 5n = 7 + n$.

[Problema proposto da G. Paolini.]

5. La risposta è **(E)**.

In generale, se P ed S indicano rispettivamente il numero di primi e di secondi in una cena, e tutti gli abbinamenti sono consentiti, il numero di possibili pasti (cioè una scelta di un primo e di un secondo) è il prodotto PS . Se indichiamo allora con P e S il numero di primi e di secondi della cena dello scorso anno, abbiamo $PS = 60$. Sia Q il numero di primi aggiunti quest'anno; ragionando come prima troviamo $(P + Q)S = 68$. D'altra parte $(P + Q)S = PQ + SQ = 60 + SQ$, dunque $SQ = 8$. S e Q sono due numeri naturali, quindi possiamo avere: $S = 8$ e $Q = 1$, ma questa scelta non è ammissibile perchè S divide 60; $S = 4$ e $Q = 2$, da cui si ha $P = 15$; $S = 2$ e $Q = 4$, da cui si ha $P = 30$; $S = 1$ e $Q = 8$, da cui si ha $P = 60$. Il minimo valore che P può avere è 15.

[Problema proposto da G. Paolini.]

6. La risposta è **(D)**.

In un parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà, quindi G è il punto medio di AF e di DE (perché queste sono le diagonali del parallelogramma $AEFD$) e similmente H è il punto medio di EC e BF ; siccome ha i lati opposti a due a due uguali, $GEHF$ è un parallelogramma. L'area di $GEHF$ è perciò la metà di quella di $EBFD$ (hanno la stessa altezza, pensando come base i lati HF e BF , e la base del primo è la metà di quella del secondo); infine, l'area di $EBFD$ può essere calcolata prendendo come base EB (che è lunga $\frac{5}{2}$ cm) ed altezza BD (che è lunga 2 cm). L'area di $GEHF$ è quindi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2$$

[Problema proposto da D. Lombardo.]

7. La risposta è **(A)**.

Un generico numero palindromo di 5 cifre può essere scritto nella forma $abcba$, dove a , essendo la prima cifra, appartiene a $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, mentre b e c variano in $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. La somma delle sue cifre è data da $2a + 2b + c$ e quindi affinché questa sia pari, c deve essere pari, oppure uguale a zero. I numeri con le proprietà richieste sono allora quelli della forma $abcba$ con: $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Quindi abbiamo nove possibilità di scelta per a , dieci per b e cinque per c , ovvero $9 \times 10 \times 5 = 450$ possibilità in tutto.

[Problema proposto da M. Carbone.]

8. La risposta è **(C)**.

Affinché l'ultimo numero sia 0 è necessario che i due che lo precedono siano di segno opposto (li chiamiamo x e $-x$) oppure entrambi 0, ma questo è impossibile perché allora tutti i numeri

precedenti sarebbero nulli, contravvenendo al testo del problema. Si può dunque costruire, procedendo a ritroso, l'intera successione di numeri dal decimo sino al primo: $0, x, -x, 2x, -3x, 5x, -8x, 13x, -21x, 34x$. Allora $x = 1$ ed è sufficiente sommare i dieci numeri per ottenere la soluzione: 22.

[Problema proposto da M. Carbone.]

9. La risposta è **(D)**.

Indichiamo con n il numero (incognito) dei lati e con S la somma delle ampiezze gli angoli interni. Sappiamo che $\frac{S}{n} = 175^\circ$. D'altra parte la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n - 2) 180^\circ$. Dunque $n 175^\circ = (n - 2) 180^\circ$, da cui si ricava facilmente $n = 72$.

[Problema proposto da G. Paolini.]

10. La risposta è **(A)**.

Le uguaglianze sono equivalenti al sistema $(a - b)x = c - b$, $(b - c)x = a - c$, $(c - a)x = b - a$, da cui, essendo i numeri tutti diversi tra loro, e quindi essendo possibile dividere per i coefficienti della x nelle rispettive equazioni, si ha $x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{b-a}{c-a}$. Moltiplicando i 3 valori della x così ottenuti si ottiene $x^3 = -1$, quindi l'unico valore possibile per x è -1 . Tuttavia sostituendolo nell'equazione iniziale si ottiene $b - a = c - b = a - c$; le tre differenze non possono essere 0 per ipotesi; se fossero positive si avrebbe $b > a > c > b$, assurdo; se fossero negative si avrebbe $b < a < c < b$, assurdo.

[Problema proposto da K. Kuzmin.]

11. La risposta è **(B)**.

Poichè tra un salto del canguro e il successivo, il numero dei salti della rana aumenta di uno, e i salti della rana sono da un vertice al successivo, il primo salto del canguro è di un vertice, il secondo di due, il terzo di tre, e così via. Quindi dopo n salti, il vertice su cui si trova segue (in senso antiorario) quello di partenza di un numero di vertici pari a

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Quindi, se dopo n salti è tornato nel vertice di partenza, $n(n + 1)$ deve essere un multiplo di 41, che è un numero primo. Quindi 41 divide n oppure $(n + 1)$. Se $n \leq 40$ l'unica possibilità è $n = 40$ e quindi $n + 1 = 41$. Quindi la prima volta che il canguro ritorna nel vertice di partenza è al quarantesimo salto.

[Problema proposto da G. Paolini.]

12. La risposta è **(E)**.

Consideriamo le coppie formate da 1 ed un numero primo p . Queste sono tutte belle: gli unici casi in cui $1 \cdot p = a \cdot b$, infatti, sono quelli in cui $a = 1, b = p$ oppure $a = p, b = 1$, per cui in ogni caso si ha $a + b = p + 1$. Le coppie belle sono quindi infinite (e perciò certamente più di otto).

[Problema proposto da D. Lombardo.]

13. La risposta è **(C)**.

L'ultima cifra del quadrato di un numero dipende solo dall'ultima cifra del numero stesso; dal momento che $0^2 = 0, 2^2 = 4, 4^2 = 16, 6^2 = 36$ e $8^2 = 64$, il quadrato di un numero pari può finire solo con 0, 4, 6. Al primo passaggio, quindi, Marta scriverà un numero che finisce con 5, 9 oppure 1 (le possibili ultime cifre che si ottengono sommando 5 a numeri che terminano con 0, 4 o 6). I quadrati di numeri che finiscono con 5, 9 o 1 finiscono con 5 o con 1, quindi al secondo passaggio il numero scritto finirà con 0 o con 6. Allo stesso modo si vede che, dopo due passaggi, numeri che terminano con 0 o 6 si sono trasformati in numeri che terminano,

rispettivamente, ancora con 0 oppure 6. Siccome il numero totale di passaggi è pari, anche il numero finale avrà come ultima cifra 0 oppure 6 (ed entrambe queste possibilità si possono verificare, perché ogni due passaggi si ripresenta la stessa cifra finale, se all'inizio questa è 0 o 6).

[Problema proposto da D. Lombardo.]

14. La risposta è **(B)**.

Osserviamo che le caselle nere contenute nelle colonne dispari e le caselle nere contenute nelle righe dispari sono le stesse. Indichiamo con N la somma dei numeri scritti su queste caselle. Inoltre ogni casella bianca sta in una colonna dispari, oppure in una riga dispari. Siano: B_1 la somma dei i numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle colonne dispari, e B_2 la somma dei numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle righe dispari. Dunque $B_1 + B_2 = 28$. Inoltre abbiamo $N + B_1 = 47$. Il numero a cui siamo interessati è $N + (-B_2) = N - B_2 = N - (28 - B_1) = N + B_1 - 28 = 47 - 28 = 19$.

[Problema proposto da G. Paolini.]

15. La risposta è **(C)**.

Lorenzo mente sicuramente, se infatti dicesse il vero, stando alla sua dichiarazione Anna mentirebbe, ma direbbe anche il vero perché Erica mente. Inoltre, almeno uno tra Anna, Giuseppe ed Erica sicuramente mente e, più precisamente, si possono verificare solo le due seguenti situazioni: Anna mente, allora Giuseppe ed Erica dicono entrambi il vero, oppure Anna non mente, allora Giuseppe ed Erica mentono entrambi. Nel caso "peggiore" tra i primi tre ci sono due persone che dicono il falso. Dato che indipendentemente dalle dichiarazioni dei tre, Lorenzo dice sempre il falso, al massimo tre dei nostri eroi mentono sempre.

[Problema proposto da S. Di Trani.]

16. La risposta è **(D)**.

I triangoli ABC e ADE sono simili. Sia S il piede dell'altezza di ADE relativa a DE . Abbiamo che:

- $\overline{DE} : \overline{BC} = 6 : 10$ e quindi $\overline{DE} = \frac{3}{5} \overline{BC}$,
- $\overline{AS} : \overline{AH} = 6 : 10$ e quindi $\overline{HS} = \overline{AH} - \overline{AS} = \frac{2}{5} \overline{AH}$.

Allora l'area di DEH è $\frac{6}{25} \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}$, ovvero l'area di ABC è $\frac{25}{6}$ dell'area di DEH .

[Problema proposto da S. Di Trani.]

17. La risposta è **(A)**.

In un'equazione di secondo grado del tipo $x^2 + mx + n = 0$, se α e β sono le soluzioni, si ha che $m = -(\alpha + \beta)$ e $n = \alpha\beta$. Nel nostro caso allora abbiamo che, se α e β sono le radici dell'equazione, allora $\frac{b}{a} = \alpha + \beta$ e $\frac{c}{a} = \alpha\beta$. Dato che $1 > \alpha$ e $1 > \beta$ abbiamo che $\frac{b}{a} < 2$ e che $\frac{c}{a} < 1$. Sommando e moltiplicando per a si ottiene che $b + c < 3a$. Osserviamo che se consideriamo l'equazione $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$, abbiamo che $a = 4 > 1$ e l'equazione ha due soluzioni che coincidono e sono uguali a $1/2 < 1$. D'altra parte in questo esempio nessuna delle affermazioni contenute nelle risposte **(B)**, **(C)**, **(D)** ed **(E)** è vera.

[Problema proposto da S. Di Trani.]

18. La risposta è **(C)**.

Notiamo prima di tutto che ciascun vertice è appartenente a esattamente tre facce, adiacenti tra loro, che quindi andranno colorate con tre colori diversi, e quindi il colore del vertice sarà univocamente determinato (è il colore mancante). Ne segue che il numero di colorazioni di facce e vertici è uguale al numero di colorazioni delle sole facce con quattro colori. Preso un

vertice, le tre facce adiacenti a cui appartiene possono essere colorate in $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi (scelgo un colore per la prima faccia, poi uno diverso per la seconda, poi uno diverso per la terza). Per comodità chiameremo questi colori 1, 2 e 3, mentre quello escluso sarà chiamato 4. Le restanti tre facce saranno adiacenti tra di loro, e ciascuna adiacente a due delle tre facce già colorate. Prese le tre facce rimanenti, dovranno dunque ancora essere colorate con tre colori diversi, quindi separiamo due casi:

- Se il colore escluso è il 4, stiamo colorando le facce del cubo con solo tre colori. Presa dunque una faccia ho solo un colore disponibile per colorarla (è già a contatto con due facce colorate con colori diversi). Fatto ciò, troviamo sempre una faccia a contatto con due colori diversi, e la colorazione si completa univocamente. Fissate le prime tre facce abbiamo dunque una sola combinazione.
- Se il colore escluso non è il 4, possiamo scegliere in tre modi dove mettere quest'ultimo, e noteremo che in ogni caso le altre due facce sono determinate univocamente (sono a contatto con il 4 e due delle precedenti), quindi fissate le prime tre facce abbiamo 3 combinazioni.

Ricombinando i calcoli, le combinazioni possibili sono $24 \cdot (1 + 3) = 96$.

[Problema proposto da R. Morandin.]

19. La risposta è **(C)**.

Notiamo prima di tutto che $r \neq 2$ (in tal caso si dovrebbe avere $p = r = 1$, ma 1 non è primo!). Dunque r è un primo dispari, e di conseguenza uno tra p e q deve essere pari, in particolare deve essere 2, non essendoci altri primi pari. L'altro ovviamente dovrà essere dispari. Se per esempio fosse $p = 2$, si avrebbe $q^2 = r - 4$ e $r < 100 \Rightarrow q^2 = r - 4 < 96$, da cui $q \leq 9$.

Le possibilità per q sono solo 3, 5, 7 per cui:

- Se $q = 3$ si avrebbe $r = 9 + 4 = 13$ che primo.
- Se $q = 5$ si avrebbe $r = 25 + 4 = 29$ che primo.
- Se $q = 7$ si avrebbe $r = 49 + 4 = 53$ che primo.

I casi con $q = 2$ sono analoghi (basta scambiare p e q) e, dato che non succede mai che $p = q$, non ci sono intersezioni e possiamo concludere che abbiamo 6 terne ordinate di primi che soddisfano la nostra equazione.

[Problema proposto da R. Morandin.]

20. La risposta è **(E)**.

Il quadrilatero $ABCD$ è formato da due triangoli rettangoli congruenti, ABC e ACD , i cui cateti misurano 20 cm e 30 cm rispettivamente. La sua area è quindi 600 cm^2 . D'altra parte, indicata con R la misura (in centimetri) del raggio del cerchio inscritto e con O il suo centro, l'area di $ABCD$ può essere calcolata come la somma delle aree dei triangoli: AOB , BOC , COD e DOA , cioè $50 R \text{ cm}^2$. Uguagliando queste due espressioni dell'area di $ABCD$ si ottiene $R = 12$.

[Problema proposto da L. Ghidelli.]

21. La risposta è **(B)**.

Per ciascuno dei diciannove giocatori che sono stati eliminati, sono state disputate due partite, che egli ha perso. Quindi sono state disputate almeno 38 partite. Inoltre, poiché il vincitore non ha perso nessuna partita, le partite giocate sono esattamente 38.

[Problema proposto da L. Ghidelli.]

22. La risposta è **(C)**.

Poiché si richiede il valore di un rapporto tra 2 lunghezze, possiamo supporre che il quadrato abbia lato 1, in una qualche unità di misura. Chiamiamo P il punto medio di DC , r la retta lungo cui avviene la piegatura. Siano inoltre H e Q le intersezioni di r con BP e BC rispettivamente. Poiché si tratta di una piega, è necessario $PH = BH$. Per il Teorema di Pitagora

$$\overline{BP} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \overline{PH} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Poiché i triangoli BQH e BPC sono simili, abbiamo

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}},$$

e dunque

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}} \overline{BH} = 2\overline{BH}^2 = \frac{5}{8}$$

da cui $\overline{CQ} = \frac{3}{8}$ e $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \frac{5}{3}$.

[Problema proposto da X.Y. Lu.]

23. La risposta è **(C)**.

C afferma l'innocenza di D. Se davvero D fosse innocente, E sarebbe il colpevole e A un suo complice; ma questo non può essere, dato che E stesso fa il nome di A come complice della rapina. Dunque C mente affermando che D sia innocente; se la sua altra affermazione fosse veritiera E sarebbe il colpevole, e dunque A, non essendo un complice, dovrebbe essere innocente; ma ciò è in contraddizione con il fatto che A stia accusando B della rapina. Quindi C mente in entrambe le sue affermazioni, per cui è l'autore della rapina. B allora non è il colpevole, quindi A è un complice; le affermazioni di E si rivelano entrambe vere, dunque E è innocente; di conseguenza anche B è innocente; infine, D mente nell'accusare E, quindi i complici tra gli interrogati sono A e D.

[Problema proposto da D. Lombardo.]

24. La risposta è **(A)**.

Notiamo che, per ogni scelta di h, k con $h < k$, a_h divide a_k . In particolare, essendo $a_{333} = 1000 \cdot a_{332}$ e $a_3 = 10 \cdot a_2$, si ha che a_3 divide a_{332} e quindi a_{332} è multiplo di 10. Di conseguenza a_{333} è multiplo di 10000 e lo è anche a_{2011} , che finisce con 4 zeri.

[Problema proposto da R. Morandin.]

25. La risposta è **(E)**.

Stabiliamo che la casella centrale della scacchiera è di tipo C, ogni casella d'angolo è di tipo A e le rimanenti caselle sono di tipo B. Osserviamo che:

- fissata una casella di tipo A vi sono 2 percorsi di un passo che conducono da questa in una di tipo B e 1 percorso di un passo che conduce in C;
- fissata una casella di tipo B vi sono 2 percorsi di un passo che conducono da questa in una di tipo A, 2 percorsi di un passo che conducono in una di tipo B e 1 percorso di un passo che conduce in C;
- vi sono 4 percorsi di un passo da C in caselle di tipo A, 4 percorsi di un passo da C in caselle di tipo B.

Da ciò segue che, in due passi, vi sono:

- 8 percorsi che conducono da C in una casella di tipo A;
- 16 percorsi che conducono da C in una casella di tipo B;
- 8 percorsi che conducono da C in una casella di tipo C.

Poiché ogni casella di tipo A ha 3 caselle adiacenti, ogni casella di tipo B ne ha 5 e la casella centrale C ne ha 8, il numero totale di percorsi di 3 passi è dato da:

$$8 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 8 = 24 + 80 + 64 = 168.$$

[Problema proposto da D'Aurizio.]