I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

5 dicembre 2001

A	B	E	E	B	A	B	C	B	B	C	B	D	E	A	C	D	B	B	D	C	C	C	D	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(A)**. La media si ottiene dividendo la somma degli interi per il loro numero, viceversa il numero degli interi può essere determinato dividendo la loro somma per la media. In questo caso si ha $18 : 6 = 3$.

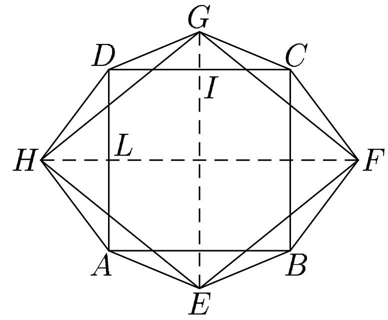
2) La risposta è **(B)**. L'elenco delle frazioni $\frac{a}{b}$ con a, b interi verificanti $1 \leq b \leq 3$ e $b \leq a \leq 2b$ è infatti $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ e, di queste, 5 sono ridotte ai minimi termini.

3) La risposta è **(E)**. Se 42 occhiali corrispondono al 70% di tutti gli allievi con difetti alla vista, significa che questi ultimi sono $\frac{42}{0{,}7} = 60$. Essi rappresentano il 40% degli allievi, che sono quindi $\frac{60}{0{,}4} = 150$, 90 dei quali vedono bene. Gli allievi con lenti a contatto sono il 30% di 60, cioè 18.

4) La risposta è **(E)**. Denotiamo con G' e G'' i genitori e con F' e F'' i figli e mostriamo che 9 traversate bastano. La strategia è: (1) vanno F' e F''; (2) torna F'; (3) va G'; (4) torna F''; (5) vanno F' e F''; (6) torna F'; (7) va G''; (8) torna F''; (9) vanno F' e F''. Per vedere che non è possibile effettuare un numero minore di traversate basta osservare che (a parte l'eventuale scambio fra i genitori oppure fra i figli quando è possibile) la strategia è obbligata. Infatti, a ogni passo, una mossa diversa porterebbe necessariamente (dato che la barca non può andare da sola) a viaggi di andata e ritorno delle stesse persone e aumenterebbe il numero complessivo di traversate.

Seconda Soluzione
Chiamiamo A gli adulti e F i figli. Schematizziamo cosí il problema: se, ad esempio, un adulto e due figli si trovano sulla riva iniziale, un adulto e la barca sulla riva finale allora indichiamo la situazione come (AFF, AB). Per capire qual è la successione ottimale di viaggi ci baseremo sul seguente semplice principio: se durante una serie di attraversamenti una stessa situazione occorre due volte, la serie non è ottimale.
All'inizio ci troviamo nella situazione $(AAFFB, \cdot)$ ed è chiaro che il primo viaggio dovrà essere intrapreso da tutti e due figli, altrimenti chiunque vada sull'altra sponda dovrà tornare indietro con la barca, riportandoci al punto di partenza $(AAFFB, \cdot)$. Quindi dopo il primo viaggio saremo in (AA, FFB) e uno solo dei figli dovrà portare la barca indietro (secondo viaggio) mettendoci nella situazione $(AAFB, F)$. Il terzo viaggio lo farà un adulto (altrimenti torneremmo a (AA, FFB)) e il quarto lo farà il figlio rimasto sulla sponda di arrivo, portandoci nella situazione $(AFFB, A)$. Il quinto viaggio non potrà essere intrapreso dall'adulto o da uno solo dei figli, altrimenti per riportare indietro la barca si tornerà o alla situazione $(AFFB, A)$ o a $(AAFB, F)$. Pertanto dopo il quinto viaggio ci troveremo in $(A, AFFB)$ e continuando a ragionare nello stesso modo si vede facilmente che il trasferimento ottimale passerà per forza per le situazioni (AFB, AF), $(F, AAFB)$, (FFB, AA), $(\cdot, AAFFB)$, per un totale di altri quattro attraversamenti. Quindi in tutto la famiglia avrà bisogno di almeno 9 viaggi per trasferirsi.

5) La risposta è **(B)**. Siano I e L i punti medi dei lati DC e AD rispettivamente. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DIG si ha $GI = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, applicando lo stesso teorema al triangolo rettangolo DHL si ha $HL = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Le diagonali del quadrilatero $EFGH$ sono perpendicolari, e si ha $EG = 5 + 24 + 5 = 34$, $HF = 9 + 24 + 9 = 42$. L'area richiesta sarà quindi $34 \cdot \dfrac{42}{2} = 714$.



6) La risposta è **(A)**. Se $\alpha = 0$ la prima equazione ha l'unica soluzione $(0, 0)$, la quale risolve anche la seconda. Se $\alpha < 0$ già la prima equazione non ha soluzioni. Se $\alpha > 0$ le soluzioni sono due, come si vede con un'interpretazione geometrica: esse sono le intersezioni della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{\alpha}$ con una retta passante per il centro.

7) La risposta è **(B)**. Sia b l'ammontare della borsa dei ragazzi e sia m il numero di ragazzi che ricevono una borsa. Allora possiamo scrivere

$$m \cdot b + (19 - m)(b + 600) = 20\,000\,,$$

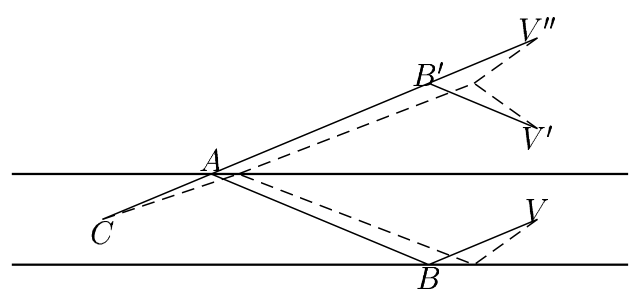
da cui ricaviamo

$$19b = 200(3m + 43)\,.$$

Siccome 19 è un numero primo, $(3m+43)$ dovrà essere un multiplo di 19. Ma $\dfrac{3m+43}{19} = 2 + \dfrac{3m+5}{19}$ e l'unico $m \leq 19$ che rende intera quest'ultima frazione è $m = 11$. Quindi $b = 200\dfrac{33+43}{19} = 800$.

8) La risposta è **(C)**. Il punteggio ottenuto al primo lancio non è sicuramente divisibile per 7, ma qualunque esso sia vi è un unico possibile secondo punteggio tale che la loro somma sia divisibile per 7. Quindi la probabilità che la somma dei primi due punteggi sia divisibile per 7 è $\dfrac{1}{6}$. Analogamente, la somma dei tre punteggi sarà divisibile per 7 solo se la somma dei primi due non lo è (che avviene con probabilità pari a $\dfrac{5}{6}$) ed inoltre se il terzo punteggio è esattamente quell'unico numero che rende il totale multiplo di 7; quindi questo evento avrà probabilità pari a $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$. In conclusione la probabilità cercata è data da $1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{36} = \dfrac{25}{36}$.

9) La risposta è **(B)**. Sia $CABV$ la spezzata che rappresenta il percorso dello stregone. Eseguendo una riflessione rispetto alla sponda rettilinea passante per A, la spezzata ABV viene trasformata in $AB'V'$; eseguendo una seconda riflessione rispetto alla retta passante per B' parallela alle sponde, il tratto $B'V'$ viene trasformato in $B'V''$.



Osserviamo che la lunghezza della spezzata $CA'B'V''$ è uguale a quella della spezzata $CABV$ e che la posizione di V'' non dipende dal percorso scelto dallo stregone. Si ha infatti $VV'' \perp CV$ e $VV'' = 20$ km. La lunghezza del percorso sarà quindi minima quando i punti C, A', B' e V'' sono allineati, cioè appartengono tutti al segmento CV''. Esso ha lunghezza $\sqrt{20^2 + 48^2}$ km $= 52$ km, pari al minimo cammino richiesto.

10) La risposta è **(B)**. Poiché le due affermazioni di Aldo contraddicono le corrispondenti affermazioni di Baldo, uno dei due deve essere il colpevole e l'altro deve essere innocente (non possono essere in due a fare un'affermazione vera ed una falsa). Se Aldo fosse colpevole, sia Carlo che Dario farebbero un'asserzione falsa e questo è impossibile, dunque il colpevole è Baldo. Inoltre l'asserzione di Carlo che il complice è Aldo è falsa e dunque il complice è Carlo. Si verifica facilmente che questa conclusione è coerente con i dati del problema.

11) La risposta è **(C)**. Osserviamo che, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ è un polinomio con coefficienti 0 o 1, allora per ogni intero k il numero $P(k)$ si rappresenta in base k mediante le cifre $(a_n a_{n-1} \ldots a_0)_k$. Poiché la rappresentazione in base 3 di $(92)_{10}$ è $(10102)_3$, e dunque contiene la cifra 2, non si può mai avere $P(3) = 92$. D'altronde **(A)** è falsa prendendo $p(x) = x^5 + x^4 + x + 1$, **(B)** è falsa prendendo $p(x) = x^3 + x^2 + 1$, **(D)** è falsa prendendo $p(x) = x^2 + x$, **(E)** è falsa prendendo $p(x) = x^3 + x^2$.

Seconda Soluzione

Un polinomio $p(x)$ con coefficienti 0 o 1 diviso per x deve dare resto 0 o 1 (il termine noto). Quindi **(C)** è vera dato che 92:3 dà resto 2.

12) La risposta è **(B)**. Ovviamente non vi sono numeri di una sola cifra, e neppure di 3 o più cifre. I numeri cercati saranno quindi della forma $10a + b$, con a e b interi e $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$. Si avrà quindi $10a + b = 3(a + b)$, da cui $7a = 2b$, che ha come unica soluzione che verifica le predette condizioni $a = 2$, $b = 7$. L'unico numero pari al triplo della somma delle proprie cifre è quindi 27.

13) La risposta è **(D)**. Notiamo che $D\widehat{A}B = D\widehat{C}B = 15°$, perché entrambi insistono sullo stesso arco. Se chiamiamo C' il simmetrico di C rispetto a O (che ovviamente si trova sulla circonferenza) avremo che $D\widehat{C'}C = D\widehat{A}C = O\widehat{A}C - D\widehat{A}B = 45° - 15° = 30°$. Quindi CDC' è un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e possiamo concludere che il cateto minore CD è metà dell'ipotenusa CC'. Visto che $CC' = 2OB = 2$ abbiamo $CD = 1$.

Seconda Soluzione

Poiché $A\widehat{B}C = 45°$, si ha $A\widehat{O}C = 90°$ e dunque anche $B\widehat{O}C = 90°$.
Poiché $B\widehat{C}D = 15°$, si ha $D\widehat{O}B = 30°$ e dunque $D\widehat{O}C = B\widehat{O}C - B\widehat{O}D = 60°$. CD è dunque il lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio e la sua lunghezza è pertanto uguale a 1.

14) La risposta è **(E)**. La somma dei primi n numeri dispari è n^2. La risposta corretta è quindi un numero che non è un quadrato perfetto. Si ha $625 = 25^2$, $1225 = 35^2$, $2025 = 45^2$, $3025 = 55^2$, $4525 = 5^2 \cdot 181$. L'unico fra questi che non è un quadrato perfetto è 4525.

15) La risposta è **(A)**. Essendo $x > 0$ per ipotesi, la diseguaglianza data è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri, e cioè $x < 9x^2$, da cui $x < 0$ oppure $x > \frac{1}{9}$. Per la condizione espressa all'inizio, solo il secondo di questi due intervalli è accettabile.

16) La risposta è **(C)**. Poniamo $A\widehat{B}E = x$ e $A\widehat{C}E = z$ e chiamiamo O l'intersezione tra BE e CA. Avremo che $B\widehat{O}C = O\widehat{C}E + C\widehat{E}O = z + y$ e $2z = A\widehat{C}E = B\widehat{O}C + O\widehat{B}C = y + z + x$. Ne ricaviamo che $z - x = y$. Inoltre $x + B\widehat{A}C = B\widehat{O}C = z + y$, da cui $B\widehat{A}C = z + y - x = 2y$.

Seconda Soluzione

Considerando il triangolo BCE ed il suo angolo esterno $E\widehat{C}D$, ricaviamo $y = E\widehat{C}D - E\widehat{B}C$. Considerando il triangolo ABC ed il suo angolo esterno $A\widehat{C}D$, ricaviamo $B\widehat{A}C = 2E\widehat{C}D - 2E\widehat{B}C = 2y$.

17) La risposta è **(D)**. Data l'affermazione della moglie, il marito è sicuramente un cavaliere (se è furfante deve aver mentito sul marito, se è cavaliere ha detto il vero), e quindi i coniugi sono entrambi laureati. Dunque le dichiarazioni sono compatibili con qualunque tipo della moglie, e quindi solo tre caselle si possono riempire.

18) La risposta è **(B)**. Siano c il numero dei cavalieri e f quello dei furfanti. Occorre calcolare $c+f$. La somma s delle risposte vale (con c addendi nella prima parentesi)

$$s = (c + \ldots + c) + (c+1) + \ldots + (c+f) = c^2 + cf + f(f+1)/2.$$

Essendo $f = 2c$ e $s = 1140$ si ha

$$3c^2 + c(2c+1) = 1140 \quad \text{cioè } 5c^2 + c - 1140 = 0 \; .$$

La soluzione positiva è $c = 15$, per cui $c + f = 3c = 45$.

19) La risposta è **(B)**. Essendo $FECD$ un parallelogramma, i triangoli ADF e FEB sono necessariamente equilateri e dunque il perimetro del parallelogramma è il doppio del lato del triangolo equilatero ABC. Ne segue che l'area di ABC è pari a $\sqrt{3}$.

20) La risposta è **(D)**. Tra i numeri di questo tipo (che sono $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$) ce ne sono $7!$ con ultima cifra 1, $7!$ con ultima cifra 2, ... e $7!$ con ultima cifra 9. La cifra delle unità del loro prodotto sarà dunque la stessa del numero $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9)^{7!}$. Siccome il numero in parentesi ha come ultima cifra 6, ogni sua potenza avrà ancora 6 come cifra delle unità.

Seconda Soluzione Per ogni cifra finale c'è lo stesso numero di numeri. Se ora si accoppia un numero che finisce per 1 con uno che finisce per 6, uno che finisce con 2 con uno che finisce per 3, uno che finisce per 4 con uno che finisce per 9 e uno che finisce per 7 con uno che finisce per 8 si ottengono quattro numeri che finiscono per 6. Quindi il prodotto finale è prodotto di tanti (cioè $4 \cdot 7!$) numeri che finiscono per 6, e finisce dunque per 6.

21) La risposta è **(C)**. Sia n il numero di partenza. Al primo passo si ottiene $2n-1$, al secondo $4n-3$, al terzo $8n-7$ e così via. Quindi è possibile mostrare per induzione che al k-esimo passo otteniamo $2^k n - 2^k + 1$, cioè $2^k(n-1)+1$. Dalla relazione $2^{2000}(n-1)+1 = 2^{2001}+1$ segue $n = 3$.

Seconda Soluzione
Il processo inverso a quello descritto è quello di aumentare il numero di un'unità e poi dimezzarlo. Così, partendo da un numero della forma $2^n + 1$, si ottiene $\frac{1}{2}(2^n+2) = 2^{n-1}+1$. Partendo da $2^{2001}+1$, dopo 2000 passi si arriva a $2^1 + 1 = 3$.

22) La risposta è **(C)**. Indichiamo con M il numero di mele. Poiché tre amici possono spartirsi le mele in parti uguali senza tagliarle, M è multiplo di 3, cioè $M = 3k$ con k intero positivo. Poiché la stessa operazione riesce anche in quattro, M è anche multiplo di 4, cioè $M = 12h$ con h intero. Ognuno dei quattro amici porterà quindi a casa $3h$ mele. Quello che ne mangia 2 per la strada, si ritroverà con un numero pari di mele. Si ha quindi $3h - 2 = 2m$, da cui $3h = 2(m+1)$. Poiché 3 e 2 sono primi fra loro, le soluzioni possibili sono $h = 2p$, $m+1 = 3p$, con p intero. La soluzione positiva più piccola si ha per $p = 1$: $m = 2$, $h = 2$, $M = 24$.

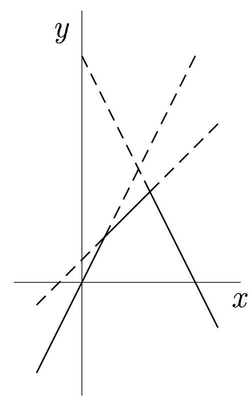
23) La risposta è **(C)**. Le tre espressioni p, q, r sono della forma $n - \sqrt{n^2-2}$, con $n = 7, 5, 2$ rispettivamente. Moltiplicando e dividendo l'espressione precedente per $n + \sqrt{n^2-2}$ si ottiene

$$n - \sqrt{n^2-2} = \frac{2}{n + \sqrt{n^2-2}} \; ;$$

il membro di destra ha il numeratore costante e il denominatore crescente al crescere di n, quindi è decrescente al crescere di n. Quindi $p = 7 - \sqrt{47}$, corrispondente a $n = 7$ è il numero più piccolo dei tre, $q = 5 - \sqrt{23}$, corrispondente a $n = 5$ è il numero intermedio fra i tre, $r = 2 - \sqrt{2}$, corrispondente a $n = 2$ è il numero più grande dei tre.

24) La risposta è **(D)**. Indicando con v_1, v_2 e v_3 le velocità dei tre ciclisti, si ha evidentemente $v_1 < v_2 < v_3$. Detto t_3 il tempo, espresso in ore, necessario al terzo ciclista per raggiungere il primo, si ha $v_3 t_3 = v_1(t_3 + 1)$ e quindi $t_3 = \dfrac{v_1}{v_3 - v_1}$. Analogamente il tempo t_2, espresso in ore, necessario al secondo ciclista per raggiungere il primo sarà $t_2 = \dfrac{v_1}{v_2 - v_1}$. Poiché $t_3 + 2 = t_2$, si ha $\dfrac{v_1}{v_3 - v_1} + 2 = \dfrac{v_1}{v_2 - v_1}$, da cui, posto $x = \frac{v_1}{v_3}$, dividendo numeratori e denominatori per v_3 e tenendo conto che $\dfrac{v_2}{v_3} = \dfrac{2}{3}$ si ottiene $\dfrac{x}{1 - x} + 2 = \dfrac{x}{\frac{2}{3} - x}$. Eliminando i denominatori si ottiene l'equazione $6x^2 - 11x + 4 = 0$ che ha come soluzioni $\dfrac{4}{3}$ e $\dfrac{1}{2}$ di cui solo la seconda è accettabile, date le disuguaglianze sulle velocità.

25) La risposta è **(C)**. Infatti, disegnate le tre rette di equazioni $y = 2x$, $y = x + 1$ e $y = 10 - 2x$, si vede che il grafico corrispondente all'equazione $y = m(x)$ è una spezzata che risulta disegnata di conseguenza. Il suo punto di ordinata massima è l'intersezione della seconda e della terza retta, cioè $(3, 4)$, per cui 4 è il valore massimo richiesto.



Seconda Soluzione

Si ha $2x \leq x + 1 < 10 - 2x$ per $x \leq 1$; $x + 1 \leq 2x \leq 10 - 2x$ per $1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$; $x + 1 \leq 10 - 2x \leq 2x$ per $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 3$; $10 - 2x \leq x + 1 < 2x$ per $x \geq 3$. È quindi possibile esprimere $m(x)$ nel seguente modo:

$$m(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x < 1 \\ x + 1 & \text{per } 1 \leq x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

Si può osservare che $m(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 5$, il massimo valore si avrà per x appartenente a tale intervallo, più precisamente le uniche possibilità sono $x = 1$ oppure per $x = 3$. Un confronto diretto mostra che $m(1) = 2$, $m(3) = 4$ che è il valore massimo cercato.