PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara del Triennio

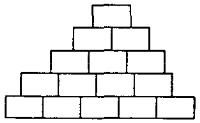
3 dicembre 1997

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento

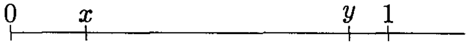
Nome ____________ *Cognome* ______________ *Classe* _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Nella figura a fianco i rettangoli (tutti uguali) hanno altezza a e base b. Il perimetro della figura
(A) è $15a + 15b$ **(B)** è $10a + 10b$ **(C)** è $15a + 30b$
(D) è $30a + 30b$ **(E)** non è nessuno dei precedenti.



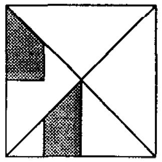
2) Dati due reali x e y tali che $0 < x < y < 1$, in quale intervallo si trova $x\sqrt{y}$?
(A) Fra 0 e x
(B) fra x e y
(C) fra y e 1
(D) oltre 1
(E) dipende dai valori di x e y.



3) Data una funzione tale che $f(x+1) = \dfrac{2f(x)+1}{2}$ e tale che $f(2) = 2$, quanto vale $f(1)$?
(A) 0 **(B)** 1/2 **(C)** 1 **(D)** 3/2 **(E)** 2.

4) Sulla lavagna si trova scritto il numero 1. La sola mossa permessa è cancellare il numero scritto sulla lavagna e sostituirlo o con il suo doppio o con il suo quadrato. Qual è il numero più grande che si può ottenere in 8 mosse?
(A) 2^8 **(B)** 4^7 **(C)** 8^8 **(D)** 2^{64} **(E)** 2^{128}.

5) Qual è la percentuale del quadrato ombreggiata in figura?
(A) 12,5% **(B)** 16,66% **(C)** 18,75% **(D)** 20% **(E)** 25%.



6) Per tagliare un anello di catena occorre un minuto, e per saldarlo di nuovo ne occorrono 5. Disponendo di 10 anelli concatenati a due a due, quanti minuti occorrono (al minimo) per formare una catena aperta di 10 anelli?
(A) 30 **(B)** 26 **(C)** 24 **(D)** 18 **(E)** 12.

7) Quale dei seguenti numeri è il più piccolo?
(A) $0,0000001$ **(B)** 9^{-8} **(C)** $(0,1)^{0,1}$ **(D)** $\sqrt{0,00001}$ **(E)** $(0,0001)^2$.

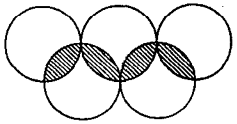
8) Le superfici totali di due cubi sono l'una doppia dell'altra. Qual è il rapporto fra i volumi dei due cubi?
(A) 2 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** $\sqrt[3]{2}$ **(E)** 4.

9) Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo. Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?
(A) Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo
(B) se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio
(C) se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio
(D) se la sera non ho fame, allora non mangio troppo
(E) se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio.

10) In un piano cartesiano sono dati i punti seguenti: $A = (0,\ 15)$; $B = (20,\ 0)$; $C = (0,\ 0)$. Qual è la larghezza minima di una *striscia rettilinea* che contiene tutti e tre i punti? [Chiamiamo *striscia rettilinea* la porzione di piano compresa tra due rette parallele, comprese le due rette.]
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 20.

11) Se $2^x = 4^{y+1}$ e $27^y = 3^{x+1}$ quanto vale $x + y$?
(A) -3 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 11
(E) non esistono coppie di numeri $(x,\ y)$ che verificano le condizioni date.

12) Determinare l'area della figura tratteggiata, sapendo che ogni circonferenza ha raggio 1 cm.
(A) π cm^2 **(B)** $(\pi - 2)$ cm^2 **(C)** $2(\pi - 1)$ cm^2
(D) $2(\pi - 2)$ cm^2 **(E)** $4(\pi - 1)$ cm^2.

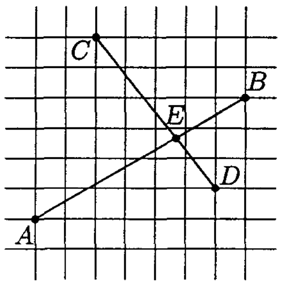


13) Un gioco consiste nel lancio ripetuto di un dado; i punteggi ottenuti ad ogni lancio vengono sommati al totale precedente e un giocatore vince tanti gettoni qual è il suo punteggio, ma non vince nulla se il suo punteggio supera 10. Un giocatore ha già un punteggio di sei. Gli conviene tirare un altro dado (sommando a sei il punteggio ottenuto) o ritirarsi dal gioco vincendo i sei gettoni?
(A) Conviene tirare: infatti in quattro casi si guadagna, in due casi soli si perde
(B) conviene fermarsi: infatti se si perde si perdono i sei gettoni, e se si vince se ne guadagnano al massimo quattro
(C) conviene tirare, ma con una motivazione differente da **(A)**
(D) conviene fermarsi, ma con una motivazione differente da **(B)**
(E) è solo questione di fortuna.

14) In una prima ci sono 3 ragazzi per ogni 2 ragazze. L'età media dei ragazzi è 14 anni e 2 mesi, quella delle ragazze 13 anni e 4 mesi. Qual è l'età media della classe?
(A) 13 anni e 6 mesi **(B)** 13 anni e 8 mesi **(C)** 13 anni e 10 mesi
(D) 14 anni **(E)** il risultato dipende dal numero di alunni della classe.

15) Quanto vale $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$?
(A) $\sqrt[20]{2}$ **(B)** $\sqrt[9]{2}$ **(C)** $\sqrt[4]{2}$ **(D)** $\sqrt[20]{2^9}$ **(E)** $\sqrt[20]{4}$.

16) Su un foglio di carta quadrettata sono disegnati, come in figura, i segmenti AB e CD. Detto E il loro punto di intersezione, quanto vale il rappporto fra la lunghezza di AE e la lunghezza di EB?
(A) Un numero razionale minore di 2
(B) un numero irrazionale minore di 2
(C) esattamente 2
(D) un numero razionale maggiore di 2
(E) un numero irrazionale maggiore di 2



17) Qual è il numero intero che approssima meglio il numero $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$?
(A) 2 **(B)** 7 **(C)** 14 **(D)** 18 **(E)** 29.

18) Quanti venerdì 13 ci possono essere al massimo in un anno non bisestile?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** più di 4.

19) Nella somma $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$, quanti segni $+$ devono essere cambiati in $-$ al minimo per poter ottenere 1997?
(A) Meno di 10 **(B)** tra 10 e 19 **(C)** tra 20 e 29 **(D)** più di 30
(E) non è possibile ottenere 1997.

20) Quante soluzioni intere positive ha l'equazione $x^2 - y^2 = 60$?
(A) Una **(B)** due **(C)** quattro **(D)** sei **(D)** infinite.

21) Nel triangolo ABC, il lato AB è lungo 1 cm e $A\hat{C}B = 120°$. Sul lato AB si costruisce un triangolo equilatero ABD avente il vertice D dalla parte opposta di C rispetto alla retta AB. Detto G il baricentro del triangolo equilatero, dire quanto misura il segmento CG.
(A) $\sqrt{3}$ cm **(B)** $\sqrt{\frac{1}{3}}$ cm **(C)** $\sqrt{2}$ cm **(D)** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ cm
(E) i dati del problema sono insufficienti.

22) Le estrazioni del lotto vengono fatte indipendentemente in varie città. In ogni città vengono estratti 5 numeri distinti fra tutti i numeri compresi fra 1 e 90. Considerando le estrazioni che riguardano le 3 città di Milano, Roma e Napoli, qual è la probabilità che il numero 13 venga estratto in una e una sola di queste 3 città?
(A) $p < \frac{1}{18}$ **(B)** $\frac{1}{18} \leq p < \frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{9} \leq p < \frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{6} \leq p < \frac{1}{4}$ **(E)** $p \geq \frac{1}{4}$.

23) Per evitare ambiguità, conveniamo che, come usuale, un numero intero non possa cominciare per zero. Un numero intero positivo si dice palindromo se la sua espressione in base 10, letta in ordine inverso (da destra a sinistra) rappresenta ancora lo stesso numero. Detto p_5 il numero di palindromi di 5 cifre, p_6 il numero di palindromi di 6 cifre, p_7 il numero di palindromi di 7 cifre, quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(A) $10p_5 = p_6$ e $10p_6 = p_7$ **(B)** $p_5 = p_6$ e $10p_6 = p_7$
(C) $10p_5 = p_6$ e $p_6 = p_7$ **(D)** $p_5 = p_6 = p_7$
(E) nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

24) Se a, b sono numeri reali positivi tali che $a + b = 1$, il minimo valore possibile per il prodotto $(1 + 1/a) \cdot (1 + 1/b)$ è
(A) 16 **(B)** 9 **(C)** 4 **(D)** non c'è un valore minimo
(E) c'è un valore minimo, ma non è fra quelli citati.

25) In quale delle seguenti figure, che rappresentano gli spigoli dei 5 solidi platonici, è possibile percorrere tutti i lati disegnati senza tornare mai sui propri passi? (naturalmente è possibile passare più di una volta sullo stesso vertice).